

## INTEGRACION NUMERICA DE PROBLEMAS DE TRAYECTORIAS

PEDRO CAMINO

*Departamento de Ecuaciones Funcionales  
(Matemática Aplicada y Computación)  
Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid*

### RESUMEN

Llamamos problema de trayectorias al consistente en la determinación de la curva que describe en el espacio de las fases la solución de un problema de Cauchy para un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Presentamos la formulación, estudio del error de truncación local en función de elementos geométricos de la curva y experimentación numérica de varios métodos en diferencias finitas específicamente diseñados para la integración numérica de ese problema.

### SUMMARY

The determination of the curve traced in the phase-space by the solution of a Cauchy problem for a system of autonomous ordinary differential equations has been called trajectory problem. Formulae, analyses of the local truncation error using geometric elements and some numerical experiments of several finite-difference methods for the numerical integration of trajectory problems are shown.

### INTRODUCCION

El planteamiento de cuestiones en diversos ámbitos conduce a la formulación de problemas de valores iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias donde el interés radica en la determinación de la **trayectoria** descrita por la solución en el espacio de las fases: así, en mecánica puede interesar determinar la trayectoria de un punto móvil en  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$  y, más generalmente, de un sistema dinámico cualquiera en un espacio de configuración apropiado **sin precisar la ley horaria**. En el estudio cualitativo de la ecuación autónoma  $H(y, y', y'') = 0$  conviene visualizar en el plano  $(y, y')$  las curvas solución  $(y(t), y'(t))$  sin que sea de interés la correspondencia  $t \rightarrow (y(t), y'(t))$ . Otro problema de este tipo surge al determinar el campo de soluciones del sistema

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

donde  $\mathbf{H}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , problema que aparece frecuentemente al introducir un parámetro de continuación para resolver un sistema de  $n-1$  ecuaciones no lineales con  $n-1$  incógnitas (Allgower-Georg<sup>1</sup>). Si  $\mathbf{H}$  es suficientemente regular, ese campo consta de curvas cuyas ecuaciones paramétricas  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  se pueden calcular como soluciones del sistema diferencial

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \quad (2)$$

Recibido: Febrero 86

$$\mathbf{v}^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 1 \quad (3)$$

(Rheinböldt<sup>11</sup>) donde en (2) se calcula la dirección de  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{x}, t)$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  que sirve para normalizar la longitud y el sentido de  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  (p. ej.,  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  implica que  $t$  sea la longitud del arco, si  $\mathbf{v}$  es el  $j$ -ésimo vector canónico entonces  $t$  resulta ser la  $j$ -ésima coordenada de  $\mathbf{x}$ ).

Todas estas situaciones conducen a lo que llamamos **problema de trayectorias** relativo a un problema de Cauchy de la forma

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \quad , \quad 0 \leq t \leq b, \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\eta} \quad , \quad (5)$$

que consiste en la determinación de la curva descrita en  $\mathbb{R}^d$  por la solución  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$  de (4) - (5) y no en la obtención de la aplicación  $t \mapsto \mathbf{y}(t)$  (que denominaremos a partir de ahora “problema clásico” de Cauchy).

La integración numérica del problema clásico de Cauchy (en el que  $\mathbf{f}$  dependerá generalmente de  $\mathbf{x}$  y de  $t$ ) ha sido ampliamente estudiada y para él se han diseñado y analizado algoritmos que han conducido a un “software” de alta calidad (Shampine-Gordon<sup>14</sup>) que se puede aplicar a la resolución de (4) - (5). Sin embargo, parece razonable pensar que algoritmos específicamente diseñados para la resolución numérica del problema de trayectorias, que aprovechen las propiedades de (4) - (5), puedan proporcionar mejores aproximaciones de su solución. Lambert y McLeod<sup>7</sup>, pioneros en este campo, formulan un esquema en diferencias de dos pasos que es “circularmente exacto”, es decir que aplicado a un problema en el plano cuya solución es una circunferencia genera puntos que están sobre ésta si sobre ella están los valores iniciales. Laurie<sup>8</sup> generaliza a  $\mathbb{R}^d$  el método propuesto por Lambert y McLeod. McLeod y Sanz Serna<sup>10</sup> dan una formulación geométrica de este método. Como variable independiente emplean el único parámetro intrínseco de la curva: la longitud del arco  $s$ . El problema (4) - (5) queda reformulado como

$$\frac{dy}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{f}(\mathbf{y})\|} \quad , \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \quad , \quad 0 \leq s \leq B \quad , \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(0) = \boldsymbol{\eta} \quad . \quad (7)$$

Esta elección elimina problemas que aparecían en los dos trabajos anteriores relativos a la elección de la parametrización y les permite llevar a cabo un análisis del error de truncación local en función de los elementos geométricos de la curva. Presentan algoritmos predictor-corrector implementados en paso variable, en los que se controla el error local y la amplitud de paso mediante el estimativo de Milne (v. Lambert<sup>6</sup>)

El uso de la extrapolación local en estos algoritmos, que supone poco aumento del costo de cálculo, se presenta como un proceso conveniente por Camino y Sanz Serna<sup>4</sup>. Sanz Serna<sup>12</sup> prueba que el método de Lambert-McLeod es convergente y estudia el método CELF que formuló como variante del Lambert-McLeod para la resolución del problema clásico, y que tiene interés para la integración de semidiscretizaciones de ecuaciones en derivadas parciales. Stetter<sup>15</sup> introduce técnicas con las que demuestra posteriormente, en una comunicación presentada en el Congreso celebrado en Munich (1984) para conmemorar el 25 aniversario de la fundación de Numerische Mathematik, que el error global de ese algoritmo tiene un desarrollo asintótico en potencias pares de  $h$  (parámetro de discretización del método), lo que hace de él un método favorable para la extrapolación local; utilizando esas técnicas logramos demostrar (Camino<sup>3</sup>) que el método CELF tiene la misma propiedad. Los métodos presentados por Zengfu<sup>16</sup> son de características similares a los que presentamos aquí.

Como se expone en nuestra tesis doctoral (Camino<sup>2</sup>), el análisis de las propiedades de convergencia de estos métodos se facilita con la inmersión de sus formulaciones en marcos más generales (Grigorieff<sup>6</sup>, Sanz Serna<sup>13</sup>, López Marcos<sup>9</sup>) en los que se demuestra el teorema fundamental del Análisis Numérico: consistencia y estabilidad implican convergencia. La convergencia de la solución numérica, es decir de la sucesión  $(y_n, n=0(1)N)$  generada por el algoritmo, hacia la solución del problema (6) y (7) debe entenderse como la convergencia de  $(y_n, n=0(1)N)$ , hacia  $(y(s_n), n=0(1)N)$ , sucesión de puntos sobre la curva solución que denominamos "solución teórica": la convergencia depende de la elección de la solución teórica. El orden de consistencia depende también de la elección de la solución teórica. En el estudio de la consistencia se han utilizado elementos geométricos de la curva (curvaturas, vectores tangente, normal,...) y las fórmulas de Frénet para obtener expresiones de los errores de truncación local mediante dos criterios de elección de los puntos teóricos que denominamos "por el arco" y "por la cuerda". En el primer criterio medimos el error de truncación local suponiendo que la sucesión de valores

$$y_n, \quad n=0(1)N \quad (8)$$

generados por el algoritmo de integración numérica aproximan los puntos  $y(s_n)$  sobre la curva solución que se obtienen avanzando repetidamente una longitud sobre la curva igual al parámetro  $h_n$  de discretización del método (amplitudes de paso):

$$s_0 = 0, \quad s_n = s_{n-1} + h_n, \quad n=1(1)N. \quad (9)$$

En el criterio por la cuerda los puntos considerados son los que verifican

$$s_0 = 0, \quad \|y(s_n) - y(s_{n-1})\| = h_n, \quad n=1(1)N, \quad (10)$$

es decir cada uno se encuentra a una distancia euclídea del anterior igual a  $h_n$  en el sentido del crecimiento de  $s$ . La existencia de tal sucesión está garantizada para  $\sup h_n$  suficientemente pequeño y  $f$  regular.

## ALGORITMOS

Para cada uno de los métodos numéricos que hemos implementado damos su formulación y citamos algunas de sus propiedades características.

### Método P1

Es el método de Lambert-McLeod

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_n + 2 (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n)^T \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_{n+1}), \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \text{ dados}, \quad (12)$$

que es circularmente exacto y verifica

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}\| = \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0\|, \quad n=1(1)N. \quad (13)$$

La formulación en paso variable de (11) - (12) propuesta por McLeod y Sanz Serna<sup>10</sup> es

$$\mathbf{y}_{n+2} = \mathbf{y}_{n+1} + \left(\frac{h_{n+1}}{h_n}\right)^2 (A_n \cdot \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n+1}), \quad (14)$$

donde

$$A_n = B_n + \left(B_n^2 - h_n^2 + \frac{h_n^4}{h_{n+1}^2}\right)^{1/2}, \quad (15)$$

$$B_n = (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n)^T \mathbf{F}_{n+1}, \quad (16)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark  
el arco y por la cuerda son respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_a(\mathbf{P1})_n &= \frac{h_{n+1}^2 (h_n + h_{n+1})}{6} (\dot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) - \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})}{8} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + \\ &+ \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - h_n^2)}{24} ((\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa} \tau + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa \tau \tau_2 \mathbf{B}_2) \\ &+ \text{términos de orden superior en } h_n, h_{n+1}, \end{aligned} \quad (17)$$

( $\kappa$  denota la curvatura,  $\tau$  la torsión,  $\tau_2$  la segunda torsión,  $\mathbf{T}$  el vector tangente,  $\mathbf{N}$  el vector normal,  $\mathbf{B}$  el binormal y  $\mathbf{B}_2$  el segundo binormal de la curva solución, todos ellos evaluados en la abscisa  $s_{n+1}$ ) y

$$\mathbf{T}_c(\mathbf{P1})_n = \frac{h_{n+1}^2 (h_n + h_{n+1})}{6} (\dot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) - \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})}{12} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} +$$

$$+ \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - h_n^2)}{24} ((\ddot{\kappa} - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2 \mathbf{B}_2) +$$

$$+ \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} . \quad (18)$$

Nótese que tanto  $\mathbf{T}_a$  como  $\mathbf{T}_c$  no presentan componentes en la dirección de la tangente en su término principal y, en particular, el término principal es nulo si  $\kappa$  es constante y  $d=2$ .

### Método P2

Hemos obtenido este método explícito de tipo Adams modificando el anterior para suprimir la raíz parásita del primer polinomio característico (v. Lambert<sup>6</sup>), con lo que aspiramos a promover su estabilidad. Su formulación en paso variable es

$$\mathbf{y}_{P_{n+2}} = \mathbf{y}_{n+1} + \frac{h_{n+1}^2}{h_n} (\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_{n+1}^*) \quad (19)$$

donde

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{B}_n + (\mathbf{B}_n^2 - \mathbf{I} + \left(\frac{h_n}{h_{n+1}}\right)^2), \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1}^*, \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^* = \frac{\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n+1}}{\|\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n+1}\|}, \quad (22)$$

es circularmente exacto y verifica la propiedad (13) en su formulación en paso fijo. Tenemos que

$$\mathbf{T}_a (P2)_n = \frac{h_{n+1}^2 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) - \frac{h_{n+1}^3}{24} \kappa^2 \mathbf{T} +$$

$$+ \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - 2h_n^2)}{24} ((\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2 \mathbf{B}_2) +$$

$$- \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})}{8} \kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} - \frac{h_{n+1}^2 (2h_{n+1}^2 - h_n^2)}{48} \kappa^3 \mathbf{N} +$$

$$+ \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} , \quad (23)$$

SCIPEDIA

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\begin{aligned}
T_c (P2)_n &= \frac{h_{n+1}^2 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} (\ddot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) - \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})}{24} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + \\
&+ \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - 2h_n^2)}{24} ((\ddot{\kappa} - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa} \tau + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa \tau \tau_2 \mathbf{B}_2) + \\
&+ \text{términos de orden superior en } h_n \ h_{n+1}.
\end{aligned} \quad (24)$$

La parte principal del error de truncación local por la cuerda no tiene componente en la dirección de la tangente.

### Método P3

Este es el método clásico de Adams-Bashforth de dos pasos

$$y_{Pn+2} = y_{n+1} + h_{n+1} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{h_{n+1}}{h_n} \right) F_{n+1} - \frac{1}{2} \frac{h_{n+1}}{h_n} F_n \right) \quad (25)$$

para el que

$$T_a (P3)_n = \frac{h_{n+1}^2 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} (\ddot{\kappa} \mathbf{N} - \kappa^2 \mathbf{T} + \kappa \tau \mathbf{B}) +$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\begin{aligned}
&+ \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - 2h_n^2)}{24} (-3\kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa} \tau + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa \tau \tau_2 \mathbf{B}_2) + \\
&+ \text{términos de orden superior en } h_n \ h_{n+1},
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
T_c (P3)_n &= \frac{h_{n+1}^2 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} (\ddot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) - \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1} + 2h_n)}{8} \kappa^2 \mathbf{T} + \\
&+ \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - 2h_n^2)}{24} ((\ddot{\kappa} - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa} \tau + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa \tau \tau_2 \mathbf{B}_2) + \\
&+ \frac{h_{n+1}^2 (3h_n^2 - h_{n+1}^2)}{12} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + \frac{h_n^2 h_{n+1}^2}{16} \kappa^3 \mathbf{N} + \\
&+ \text{términos de orden superior en } h_n \ h_{n+1}.
\end{aligned} \quad (27)$$

### Método P4

El método P2 tiene la potencial ventaja de ser de tipo Adams, pero su error de truncación local por el arco tiene términos principales en la dirección de la tangente. Construimos éste algoritmo (P4) de tipo Adams

$$\mathbf{y}_{n+2}' = \mathbf{y}_{n+1}' + H_n \left( \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_{n+1}}{h_n}\right) \mathbf{F}_{n+1} - \frac{1}{2} \frac{h_{n+1}}{h_n} \mathbf{F}_n \right), \quad (28)$$

donde

$$H_n = h_{n+1} + \left( \left( \frac{h_{n+1}}{h_n} \right)^3 \frac{3h_n + 2h_{n+1}}{2h_{n+1}} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n)' \mathbf{F}_{n+1} \right), \quad (29)$$

para que su error por el arco no contenga componentes en la dirección de la tangente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_a (P4)_n = & \frac{h_{n+1}^2 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} (\dot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) + \\ & + \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - 2h_n^2)}{24} (-3\kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + (\dot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa} \tau + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa \tau \tau_2 \mathbf{B}_2) + \\ & + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})}{24} \kappa^3 \mathbf{N} - \frac{h_{n+1}^2 h_n (3h_n + 2h_{n+1})}{16} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + \end{aligned}$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_c (P4)_n = & \frac{h_{n+1}^2 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} (\dot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) + \frac{h_{n+1}^2 h_n}{16} \kappa^2 \mathbf{T} + \\ & + \frac{h_{n+1}^2 (h_{n+1}^2 - 2h_n^2)}{24} ((\dot{\kappa} - \kappa \tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa} \tau + \kappa \dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa \tau \tau_2 \mathbf{B}_2) + \\ & + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})}{32} \kappa^3 \mathbf{N} - \frac{h_{n+1}^2 h_n (3h_{n+1} + 2h_n)}{24} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + \\ & + \frac{h_{n+1}^2 h_n^2}{16} \kappa^3 \mathbf{N} - \frac{h_{n+1}^2 (3h_n^2 - h_{n+1}^2)}{12} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} + \\ & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1}. \end{aligned} \quad (31)$$

### Método C1

Es la fórmula

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + h_{n+1} \frac{F_{n+1} + F_{n+2}}{\|F_{n+1} + F_{n+2}\|}, \quad (32)$$

utilizada por McLeod y Sanz Serna<sup>10</sup> para formar el par predictor-corrector P1-C1. Es circularmente exacto y satisface la propiedad (13). Los errores de truncación local son

$$T_a(C1)_n = -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\ddot{K}N + \frac{1}{2} \kappa^2 T + \kappa \tau B) - \frac{h_{n+1}^4}{24} ((\ddot{K} + \frac{1}{2} \kappa^3 - \kappa \tau^2)N + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \kappa\tau\tau_2 B_2) +$$

+ términos de orden superior en  $h_n h_{n+1}$ , (33)

$$T_c(P1) = -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{K}N + \kappa\tau B) - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-\kappa\dot{K}T + (\ddot{K} - \kappa\tau^2)N + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \kappa\tau\tau_2 B_2) +$$

+ términos de orden superior en  $h_n h_{n+1}$ . (34)

### Método C2

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

El método de Adams-Moulton clásico de un paso

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{h_{n+1}}{2} (F_{n+1} + F_{n+2}), \quad (35)$$

está incluido en esta relación junto con el método P2 para que sirva de comparación con los otros relacionados aquí. Sus errores son

$$T_a(C2)_n = -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{K}N - \kappa^2 T + \kappa\tau B) - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-3\kappa\dot{K}T + (\ddot{K} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N +$$

+  $(2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \kappa\tau\tau_2 B_2) +$

+ términos de orden superior en  $h_n h_{n+1}$ , (36)

$$T_c(C2)_n = -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{K}N - \frac{3}{2}\kappa^2 T + \kappa\tau B) +$$



$$\begin{aligned}
 & - \frac{h_{n+1}^4}{24} \left( -4\kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + \left( \ddot{\kappa} - \frac{3}{2}\kappa^3 - \kappa\tau^2 \right) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2 \mathbf{B}_2 \right) + \\
 & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} .
 \end{aligned} \tag{37}$$

### Método C3

Análogamente a lo que hacíamos para deducir el método P4, determinamos aquí un algoritmo implícito de la forma

$$\mathbf{v}_{n+2} = \mathbf{v}_{n+1} + \frac{H_{n+1}}{2} (\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_{n+2}) \tag{38}$$

cuyo error de truncación local por el arco no contenga componentes en la dirección de la tangente. Resulta

$$H_{n+1} = \frac{1}{2} (h_{n+1} - \frac{1}{2} \frac{h_{n+1}^3}{h_n}) + ((\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)^T \mathbf{F}_{n+1} - h_n). \tag{39}$$

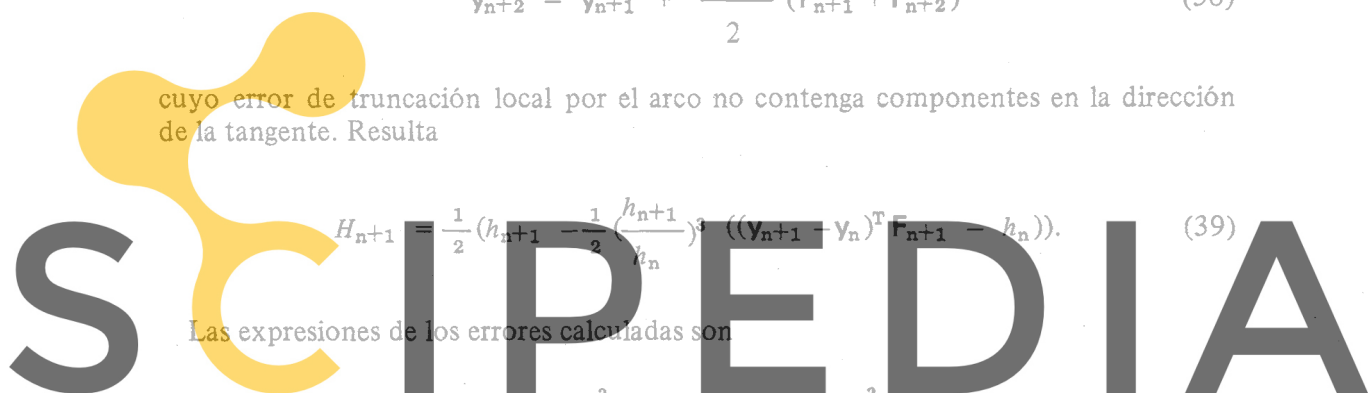
Las expresiones de los errores calculadas son

$$\mathbf{T}_a (C3)_n = - \frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) + \frac{h_{n+1}^3 h_n}{16} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_{n+1}^4}{24} \left( -3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2 \mathbf{B}_2 \right) + \\
 & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} ,
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\mathbf{T}_c (C3)_n = - \frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) + \frac{h_{n+1}^3}{16} \kappa^2 \mathbf{T} + \frac{h_{n+1}^3 (h_n + 4h_{n+1})}{24} \kappa \dot{\kappa} \mathbf{T} +$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{h_{n+1}^4}{24} \left( (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2) \mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau}) \mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2 \mathbf{B}_2 \right) + \frac{h_{n+1}^4}{32} \kappa^3 \mathbf{N} + \\
 & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} .
 \end{aligned} \tag{41}$$



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Las implementaciones que nos interesan son las de los pares predictor-corrector P1-C1, P2-C1, P3-C2, P1-C3 y P4-C3, que corresponden a las combinaciones de las fórmulas citadas en cuya etapa correctora (C) se sustituye  $F_{n+2}$  por  $F(y_{p_{n+2}})$ . Tienen por errores de truncación local las expresiones

$$\begin{aligned} T_c (P1-C1)_n = & -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa}N + \kappa\tau B) - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-\kappa\dot{\kappa}T + (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)N + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \kappa\tau\tau_2 B_2) + \\ & + \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})}{6} H_{n+1}'(y(s_{n+2})) (\dot{\kappa}N + \kappa\tau B) + \\ & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1}, \end{aligned} \quad (42)$$

donde

$$H_{n+1}(x) = \frac{F(y(s_{n+1})) + F(x)}{\|F(y(s_{n+1})) + F(x)\|}. \quad (43)$$

$$\begin{aligned} T_c (P2-C1) = & -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa}N + \kappa\tau B) - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-\kappa\dot{\kappa}T + (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)N + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \kappa\tau\tau_2 B_2) + \\ & + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})}{12} H_{n+1}'(y(s_{n+2})) (\dot{\kappa}N + \kappa\tau B) + \\ & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} T_a (P3-C2)_n = & -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa}N - \kappa^2 T + \kappa\tau B) - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-3\kappa\dot{\kappa}T + (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \\ & + \kappa\tau\tau_2 B_2) + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})}{24} F(y(s_{n+2})) (\dot{\kappa}N - \kappa^2 T + \kappa\tau B) + \\ & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1}. \end{aligned} \quad (45)$$

$$T_a (P1-C3)_n = -\frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa}N + \kappa\tau B) + \frac{h_{n+1}^3 h_n}{16} \kappa\kappa T +$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2\mathbf{B}_2) + \\
 & + \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})}{12} \mathbf{F}'(\mathbf{y}(s_{n+2})) (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \\
 & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1}, \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_a (\text{P4-C3})_n &= - \frac{h_{n+1}^3}{12} (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \frac{h_{n+1}^3 h_n}{16} \kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + \\
 & - \frac{h_{n+1}^4}{24} (-3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2\mathbf{B}_2) + \\
 & + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})}{24} \mathbf{F}'(\mathbf{y}(s_{n+2})) (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \\
 & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

y los mismos pares en los que se ha realizado la extrapolación local: P1-C1-E, P2-C1-E, P3-C2-E, P1-C3-E y P4-C3-E (en los dos primeros por la cuerda, en los restantes por el arco). En éstos, el valor se obtiene por la combinación lineal

$$\mathbf{y}_{e_{n+2}} = (1 - h_{e_{n+1}})\mathbf{y}_{n+2} + h_{e_{n+1}} \mathbf{y}_{p_{n+2}} \quad (48)$$

donde  $h_{e_{n+1}}$  toma respectivamente los valores

$$\frac{h_{n+1}}{2h_n + 3h_{n+1}}, \quad \frac{h_{n+1}}{3(h_n + h_{n+1})}, \quad \frac{h_{n+1}}{3(h_n + h_{n+1})}, \quad \frac{h_{n+1}}{2h_n + 3h_{n+1}}, \quad \frac{h_{n+1}}{3(h_n + h_{n+1})}, \quad (49)$$

calculados al realizar la extrapolación local (v. Lambert<sup>6</sup>, Camino<sup>2</sup>). Los errores para los algoritmos extrapolados son

$$\mathbf{T}_c (\text{P1-C1-E})_n = - \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})}{24(2h_n + 3h_{n+1})} ((\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2\mathbf{B}_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})^2}{3(2h_n + 3h_{n+1})} \mathbf{H}'_{n+1}(\mathbf{y}(s_{n+2})) (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \\
& + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} .
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_c (\text{P2-C1-E})_n &= - \frac{h_{n+1}^3 (2h_n + h_{n+1})}{72} ((\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2\mathbf{B}_2) + \\
& + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})^2}{36(h_n + h_{n+1})} \mathbf{H}'_{n+1}(\mathbf{y}(s_{n+2})) (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \\
& + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} ,
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_a (\text{P3-C2-E})_n &= - \frac{h_{n+1}^3 (2h_n + h_{n+1})}{72} (-3\kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + (\ddot{\kappa} - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2\mathbf{B}_2) + \\
& + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})^2}{72(h_n + h_{n+1})} \mathbf{F}'(\mathbf{y}(s_{n+2})) (\dot{\kappa}\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \\
& + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} ,
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_a (\text{P1-C3-E})_n &= - \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})^2}{24(2h_n + 3h_{n+1})} ((\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})\mathbf{B} + \kappa\tau\tau_2\mathbf{B}_2) + \\
& - \frac{h_{n+1}^3 (h_{n+1}^2 - h_n^2)}{24(2h_n + 3h_{n+1})} \kappa^3\mathbf{N} + \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})^2}{8(2h_n + 3h_{n+1})} \kappa\dot{\kappa}\mathbf{T} + \\
& + \frac{h_{n+1}^3 (h_n + h_{n+1})^2}{6(2h_n + 3h_{n+1})} \mathbf{F}'(\mathbf{y}(s_{n+2})) (\dot{\kappa}\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}) + \\
& + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} ,
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 T_a (P4-C3-E)_n = & - \frac{h_{n+1}^3 (2h_n + h_{n+1})}{72} (-3\kappa\dot{\kappa}T + (\ddot{\kappa} - \kappa\tau^2)N + (2\dot{\kappa}\tau + \kappa\dot{\tau})B + \kappa\tau\tau_2 B_2) + \\
 & + \frac{h_{n+1}^3 (2h_n + h_{n+1})}{72} \kappa^3 N + \frac{h_{n+1}^3 (3h_n + 2h_{n+1})^2}{72(h_n + h_{n+1})} F'(y(s_{n+2})) (\dot{\kappa}N + \kappa\tau B) + \\
 & + \text{términos de orden superior en } h_n h_{n+1} .
 \end{aligned} \tag{54}$$

En las tablas siguientes se exponen esquemáticamente las características reseñables de los métodos citados

METODO	CIRCULARMENTE- EXACTO	MILNE-ARCO	MILNE-CUERDA	APARECE ARCO	$\kappa^2 T$ CUERDA
P1-C1	SI	NO	SI	SI	NO
P2-C1	SI	NO	SI	SI	NO
P3-C2	NO	SI	NO	SI	SI
P1-C3	NO	SI	NO	NO	SI
P4-C3	NO	SI	NO	NO	SI

METODO	ORDEN-ARCO	ORDEN-CUERDA	APARECE ARCO	$\kappa^2 T$ CUERDA
P1-C1-E	2	3	—	NO
P2-C1-E	2	3	—	NO
P3-C2-E	3	2	SI	—
P1-C3-E	3	2	NO (*)	—
P4-C3-E	3	2	SI	—

(\*) El segundo sumando de (53) es nulo si  $h_{n+1} = h_n$ .

Observemos que en estas tablas se presentan los órdenes locales según los dos criterios considerados, lo cual pone de manifiesto que para cada método es más adecuado uno solo de los criterios. Es interesante conocer si existen términos con componente en la dirección de la tangente en los que aparezca sola la curvatura. La aplicabilidad del criterio de Milne depende de que las expresiones de las partes principales de los errores de truncación local en la fórmula predictora (P) y en la fórmula correctora (C) sean iguales, por lo que únicamente resultan adecuadas las formulaciones de los pares predictor-corrector presentadas.

### EXPERIMENTACION NUMERICA

Los resultados de los experimentos numéricos se han realizado tanto en **paso fijo** como en **paso variable** sobre los siguientes problemas modelo.

Problema A:

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_2, \\y_2' &= y_1, \\y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1,\end{aligned}$$

cuya trayectoria es la circunferencia del plano centrada en el origen y de radio unidad.

Problema B:

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_2, \\y_2' &= \sin(y_1), \\y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1,\end{aligned}$$

que es la ecuación del péndulo, con trayectoria

$$y_2^2 - 2\cos(y_1) + 1 = 0.$$

Problema C:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2(2y_1^2 + y_2^2), \\y_2' &= -y_1^3, \\y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1,\end{aligned}$$

problema cuya solución describe la trayectoria

$$y_1^2 + y_2^2 - \exp(y_1^2/(y_1^2 + y_2^2)) = 0.$$

Problema D:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 - 0.1(y_1^3 - 3y_1), \\y_2' &= -y_1, \\y_1(0) &= 0, \quad y_2(0) = 1,\end{aligned}$$

problema de valores iniciales para la ecuación de Van der Pol cuya solución describe una trayectoria que tiende a un ciclo límite, como se ve en la Figura 7.

Los resultados obtenidos nos permiten afirmar que el comportamiento de los algoritmos propuestos es satisfactorio y mejor que el de los métodos comparables utilizados para el problema clásico considerados aquí. Estos experimentos incluyen la obtención de datos numéricos y de gráficas. En el primer caso, las tablas para los algoritmos en paso fijo contienen los errores globales que se obtienen multiplicando sucesivamente el número de pasos por dos al tiempo que se divide la amplitud de paso correspondiente por dos. Las tablas 1 y 2, para el problema B, ponen de manifiesto el orden experi-

**Tabla 1**

Problema 2						
Punto teórico por el ARCO						
h	0.20000	0.10000	0.05000	0.02500	0.01250	0.00625
n	250	500	1000	2000	4000	8000
P1C1	0.33E-01	* 2.5* 0.13E-01	* 3.2* 0.41E-02	* 3.6* 0.11E-02	* 3.8* 0.30E-03	* 3.9* 0.76E-04
P2C1	0.32E-01	* 2.4* 0.13E-01	* 3.2* 0.41E-02	* 3.6* 0.11E-02	* 3.8* 0.30E-03	* 3.9* 0.76E-04
P3C2	0.18E+01	* 7.4* 0.25E+00	* 9.6* 0.26E-01	* 13.2* 0.20E-02	* 24.7* 0.80E-04	* 0.9* 0.90E-04
P1C3	0.48E-01	* 6.8* 0.70E-02	* 7.2* 0.97E-03	* 7.0* 0.14E-03	* 6.4* 0.22E-04	* 5.8* 0.37E-05
P4C3	0.11E+00	* 12.5* 0.91E-02	* 8.8* 0.10E-02	* 7.3* 0.14E-03	* 6.5* 0.22E-04	* 5.8* 0.37E-05
P1C1-E	0.64E-01	* 3.5* 0.18E-01	* 3.8* 0.48E-02	* 3.9* 0.12E-02	* 3.9* 0.31E-03	* 4.0* 0.79E-04
P2C1-E	0.57E-01	* 3.4* 0.17E-01	* 3.6* 0.46E-02	* 3.8* 0.12E-02	* 3.9* 0.31E-03	* 4.0* 0.78E-04
P3C2-E	0.12E+01	* 7.7* 0.15E+00	* 8.0* 0.19E-01	* 8.0* 0.24E-02	* 8.0* 0.30E-03	* 8.0* 0.37E-04
P1C3-E	0.16E-01	* 7.4* 0.22E-02	* 7.9* 0.28E-03	* 8.0* 0.35E-04	* 8.0* 0.44E-05	* 8.0* 0.55E-06
P4C3-E	0.47E+00	* 8.5* 0.55E-01	* 8.2* 0.67E-02	* 8.0* 0.83E-03	* 8.0* 0.10E-03	* 8.0* 0.13E-04

**Tabla 2**

Problema 2						
Punto teórico por la CUERDA						
h	0.20000	0.10000	0.05000	0.02500	0.01250	0.00625
n	250	500	1000	2000	4000	8000
P1C1	0.49E-01	* 6.9* 0.71E-02	* 7.3* 0.98E-03	* 7.0* 0.14E-03	* 6.5* 0.22E-04	* 5.8* 0.37E-05
P2C1	0.49E-01	* 6.9* 0.71E-02	* 7.3* 0.98E-03	* 7.0* 0.14E-03	* 6.5* 0.22E-04	* 5.8* 0.37E-05
P3C2	0.18E+01	* 7.9* 0.23E+00	* 11.0* 0.21E-01	* 29.2* 0.71E-03	* 1.8* 0.39E-03	* 2.3* 0.17E-03
P1C3	0.13E+00	* 4.7* 0.27E-01	* 4.5* 0.60E-02	* 4.3* 0.14E-02	* 4.2* 0.34E-03	* 4.1* 0.83E-04
P4C3	0.20E+00	* 6.6* 0.29E-01	* 4.8* 0.61E-02	* 4.3* 0.14E-02	* 4.2* 0.34E-03	* 4.1* 0.83E-04
P1C1-E	0.18E-01	* 7.7* 0.23E-02	* 8.0* 0.29E-03	* 8.0* 0.36E-04	* 8.0* 0.45E-05	* 8.0* 0.56E-06
P2C1-E	0.25E-01	* 7.1* 0.35E-02	* 7.8* 0.45E-03	* 8.0* 0.57E-04	* 8.0* 0.71E-05	* 8.0* 0.89E-06
P3C2-E	0.11E+01	* 8.3* 0.13E+00	* 9.4* 0.14E-01	* 12.5* 0.11E-02	* 50.7* 0.22E-04	* 0.5* 0.42E-04
P1C3-E	0.98E-01	* 4.3* 0.23E-01	* 4.2* 0.54E-02	* 4.1* 0.13E-02	* 4.1* 0.32E-03	* 4.0* 0.80E-04
P4C3-E	0.55E+00	* 7.3* 0.75E-01	* 6.4* 0.12E-01	* 5.6* 0.21E-02	* 5.0* 0.42E-03	* 4.6* 0.92E-04

mental del error global que coincide con el esperado de acuerdo con el estudio teórico previo: se aprecia un cociente igual a 8 (orden 3) en las filas correspondientes a P3-C2-E, P1-C3-E y P4-C3-E por el arco y en las de P1-C1-E y P2-C1-E por la cuerda, mientras que el cociente es 4 (próximo a 4 y por tanto orden 2) para P1-C1-E y P2-C1-E por el arco y para P3-C2-E, P1-C3-E y P4-C3-E por la cuerda. Esto concuerda con el análisis efectuado de acuerdo a los dos criterios de elección de puntos teóricos y con la adecuación de uno solo de criterios para cada método.

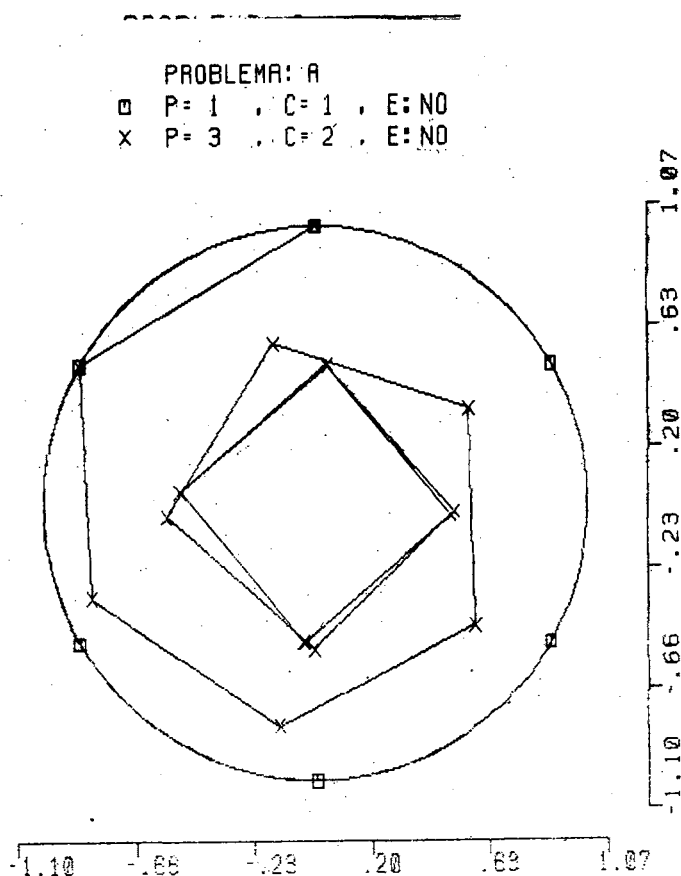


Figura 1.— Amplitud de paso: 1.0, número de pasos: 40.

Los gráficos dan una visión global del comportamiento del método y permiten observar ciertas propiedades como son la aproximación de ciclos límite y la distancia mínima a la curva de los puntos  $y_n$  generados por el método. En la Figura 1, correspondiente al problema A, se presentan las aproximaciones de P1-C1 (método específico para trayectorias) por el símbolo □ y las del método P3-C2 (método convencional) por símbolos X unidos por segmentos de recta. Al tomar para ambos métodos la amplitud de paso  $h$  igual a 1, que es radio de la circunferencia que aproximamos, P1-C1 genera puntos que se sitúan sobre los vértices de un hexágono inscrito en ella; por tanto



proporciona los puntos teóricos por la cuerda para  $h=1$ . El comportamiento cualitativo de P3-C2 resulta erróneo, pues genera un "ciclo límite espurio" dispuesto sobre los cuatro vértices de un cuadrado con centro en el origen. El lado de este cuadrado decrece si disminuimos la amplitud de paso, como es el caso de la Figura 2. Aquí, P2-C1 aproxima satisfactoriamente la trayectoria como lo hacen P1-C1-E y P2-C1-E en las Figuras 3 y 4, mientras que el comportamiento de P3-C2-E es de nuevo cualitativamente erróneo, generando una configuración espuria hexagonal más alejada de la trayectoria real cuanto más pequeña se toma la amplitud de paso. En la siguiente sección se presenta un análisis del comportamiento de P3-C2 y P3-C2-E mostrado en las Figuras 1, 2, 3 y 4. La Figura 5, relativa al problema B, pone de manifiesto que los métodos citados tienen un comportamiento similar al descrito anteriormente para el problema A.

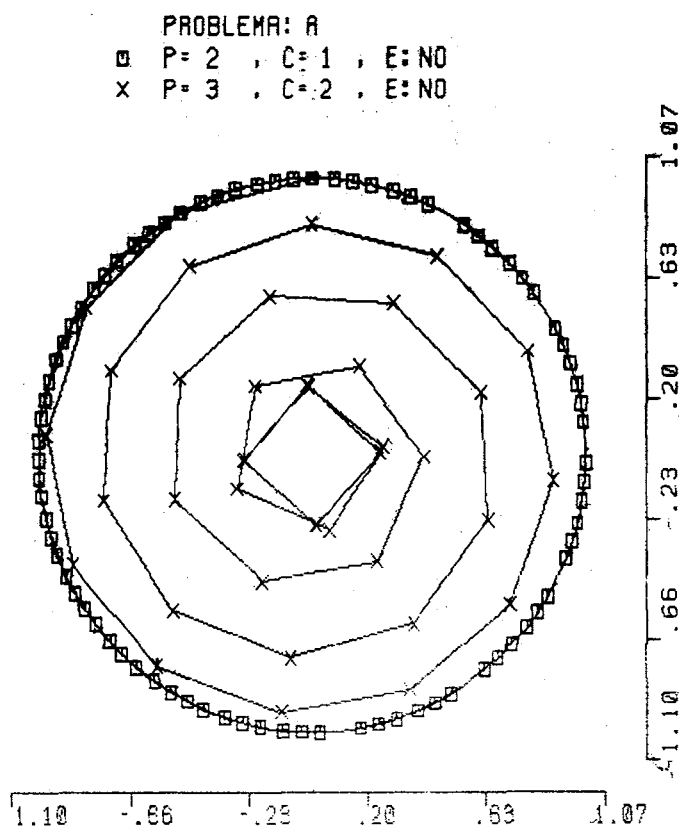


Figura 2.— Amplitud de paso: 0.50, número de pasos: 80.

PROBLEMA: A  
 □ P= 2 , C= 1 , E: SI  
 x P= 3 , C= 2 , E: SI

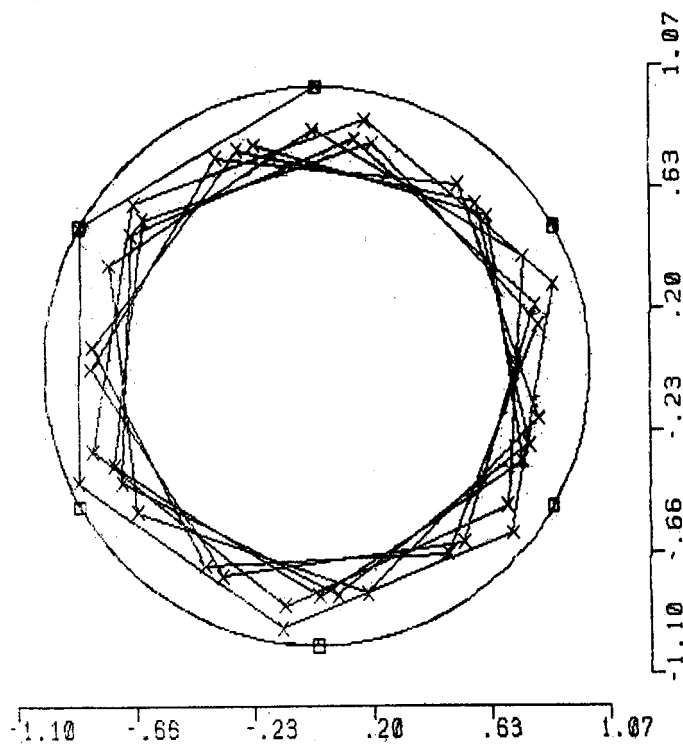


Figura 3.— Amplitud de paso: 1.0, número de pasos: 40.

PROBLEMA: A  
 □ P= 1 , C= 1 , E: SI  
 x P= 3 , C= 2 , E: SI

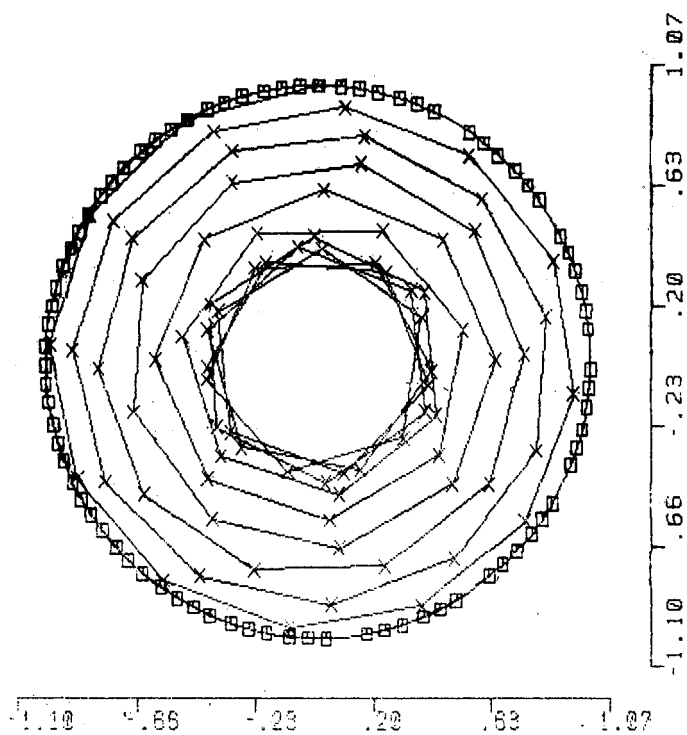


Figura 4.— Amplitud de paso: 0.50, número de pasos: 80.

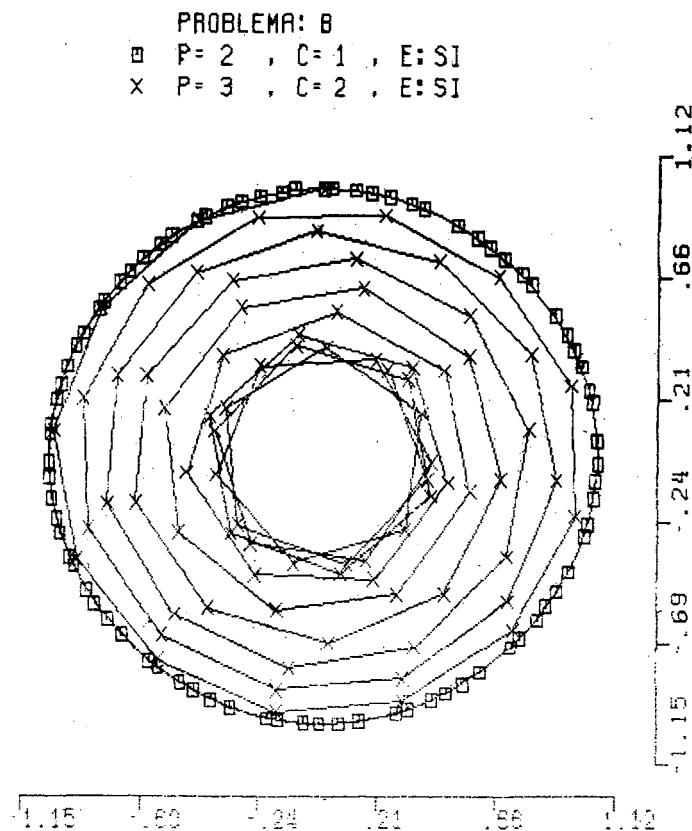


Figura 5.— Amplitud de paso: 0.50, número de pasos: 80.

La implementación en paso variable de pares predictor-corrector en modo PECE y de las mismas fórmulas extrapoladas tiene como parámetro la tolerancia en el control del error local mediante el estimativo de Milne (v. Lambert<sup>6</sup>). En las tablas 3 y 4 se presentan los datos obtenidos para el problema B después de que cada uno de ellos ha recorrido una misma longitud de arco de la trayectoria. Aparte de la comparación de los **errores globales** de los distintos métodos, es interesante hacer notar que en cuanto al costo en el cálculo (en el uso del algoritmo en el ordenador) al número de pasos necesarios para alcanzar el punto determinado hay que sumar el número de veces que se ha rechazado el paso, pues un rechazo supone rehacer los cálculos. En este sentido, los métodos convencionales P3-C2 y P3-C2-E son más costosos, al tiempo que el error mínimo para ellos es el de mayor magnitud de los de los métodos utilizados aquí.

La implementación en paso variable de los métodos extrapolados con control del error local produce las mejores aproximaciones. Aún cuando la aproximación a los puntos teóricos suele quedar reflejada en las tablas de errores globales por cantidades

apreciables, las gráficas ponen de manifiesto que los valores de la distancia mínima de la solución numérica a la trayectoria son satisfactorios. Como ejemplo, se presentan las Figuras 6 y 7 relativas a los problemas C y D.

Tabla 3

Problema 2						
Tolerancia = 0.01000						
	n. pasos	n. rechazos	error por el arco	error por la cuerda	paso máx.	suma pas.
*****						
P1C1	41	6	0.75E+00	0.18E+00	1.03	30.65
P2C1	40	9	0.25E+00	0.65E+00	1.09	30.27
P3C2	95	0	0.41E+00	0.41E+00	0.38	30.05
P1C3	49	2	0.39E+00	0.95E+00	0.91	30.62
P4C3	54	3	0.22E+01	0.23E+01	0.81	30.23
*****						
P1C1-E	47	7	0.69E+00	0.54E-01	1.07	30.31
P2C1-E	40	8	0.31E+00	0.64E+00	1.10	30.24
P3C2-E	89	0	0.19E+01	0.18E+01	0.38	30.22
P1C3-E	46	4	0.60E-01	0.73E+00	0.93	30.25
P4C3-E	55	7	0.19E+01	0.16E+01	0.82	30.48

Tabla 4

Problema 2						
Tolerancia = 0.00100						
	n. pasos	n. rechazos	error por el arco	error por la cuerda	paso máx.	suma pas.
*****						
P1C1	116	30	0.96E-01	0.48E-02	0.38	30.20
P2C1	109	24	0.86E-01	0.17E-01	0.41	30.12
P3C2	179	0	0.46E+00	0.42E+00	0.18	30.08
P1C3	118	31	0.15E-01	0.74E-01	0.38	30.21
P4C3	110	20	0.17E+00	0.27E+00	0.42	30.13
*****						
P1C1-E	112	24	0.11E+00	0.11E-01	0.39	30.22
P2C1-E	108	22	0.12E+00	0.19E-01	0.40	30.16
P3C2-E	178	0	0.27E+00	0.24E+00	0.18	30.07
P1C3-E	113	26	0.16E-01	0.79E-01	0.38	30.08
P4C3-E	111	16	0.42E+00	0.52E+00	0.43	30.06

PROBLEMA: C  
 □ P= 1 , C= 3 , E: NO  
 x P= 3 , C= 2 , E: NO

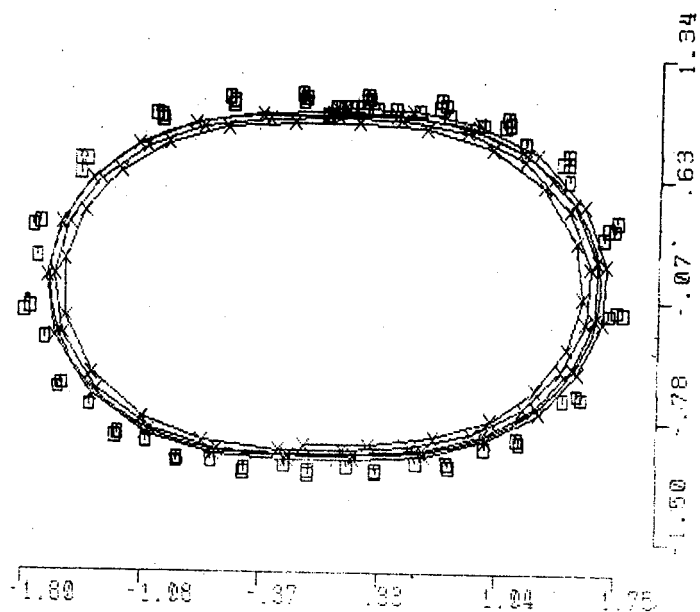


Figura 6.— Tolerancia: 0.010.

PROBLEMA: D  
 □ P= 4 , C= 3 , E: SI  
 x P= 3 , C= 2 , E: SI

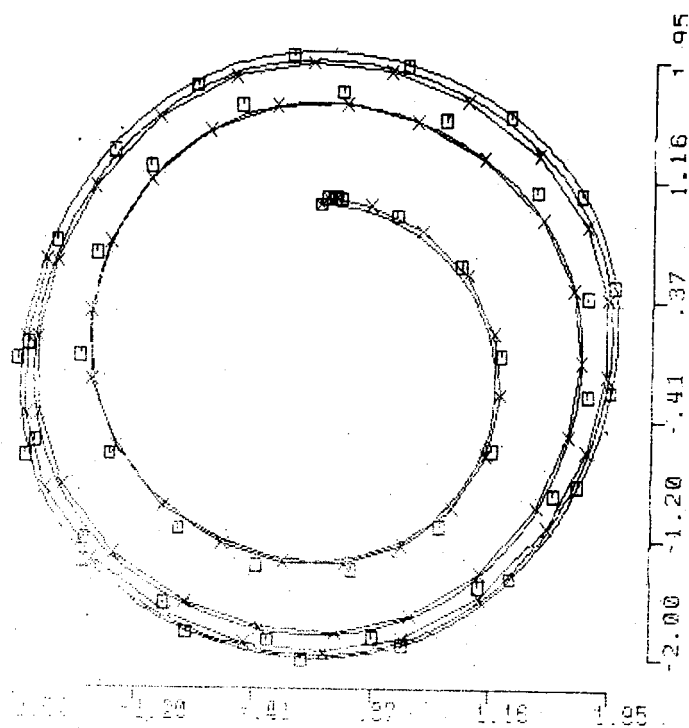


Figura 7.— Tolerancia: 0.010.

## CONFIGURACIONES ESTABLES EN METODOS ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

Investigamos las configuraciones estables que surgen al aplicar los métodos Adams-Bashforth-Moulton al problema A y que hemos observado en las Figuras 1 y 2, donde los puntos generados por el algoritmo P3-C2 se sitúan sobre los cuatro vértices de un cuadrado y el algoritmo genera una configuración hexagonal (Figuras 3 y 4).

Introducimos en  $\mathbb{R}^2$  un sistema de coordenadas polares y denotamos por  $\rho_n$  el radio polar del vector  $\mathbf{y}_n$ , por  $\alpha_{n+1}$  el ángulo orientado del vector  $\mathbf{y}_n$  al vector  $\mathbf{y}_{n+1}$ , por  $\sigma_n$  el radio polar del valor  $\mathbf{y}\mathbf{p}_n$  generado por P3 y por  $\beta_{n+1}$  el ángulo de  $\mathbf{y}_n$  a  $\mathbf{y}\mathbf{p}_{n+1}$ . Queremos expresar  $(\rho_{n+2}, \alpha_{n+2})$  en función de  $(\rho_{n+1}, \alpha_{n+1})$ . Identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , los vectores  $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}\mathbf{p}_{n+2}, \mathbf{y}_{n+2}$  se representan por  $\rho_n \cdot \exp(-i\alpha_{n+1})$ ,  $\rho_{n+1}, \sigma_{n+2} \cdot \exp(i\beta_{n+2})$ ,  $\rho_{n+2} \cdot \exp(i\alpha_{n+2})$  y  $\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{F}_{n+2}, \mathbf{F}_{n+2}$  corresponden a  $i \cdot \exp(-i\alpha_{n+1})$ ,  $i$ ,  $i \cdot \exp(i\beta_{n+2})$ ,  $i \cdot \exp(i\alpha_{n+2})$  respectivamente. Sustituyendo en las fórmulas (25) y (35) se deducen

$$\operatorname{tg}(\alpha_{n+2}) = \frac{h/2 + (h/2)\cos(\beta_{n+2})}{\rho_{n+1} - (h/2)\sin(\beta_{n+2})}, \quad (55)$$

$$\rho_{n+2}^2 = (\rho_{n+1} - \frac{h}{2}\sin(\beta_{n+2}))^2 + (\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\cos(\beta_{n+2}))^2, \quad (56)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_{n+2}) = \frac{3h/2 - (h/2)\cos(\alpha_{n+1})}{\rho_{n+1} - (h/2)\sin(\alpha_{n+1})}. \quad (57)$$

Dividiendo numerador y denominador de (55) y (57) por  $h$  y dividiendo (56) por  $h^2$  obtenemos  $(\alpha_{n+2}, \rho_{n+2}/h)$  en función de  $(\alpha_{n+1}, \rho_{n+1}/h)$  por la transformación que lleva  $(\alpha, r)$  en  $(A, R)$  según las relaciones

$$\operatorname{tg}(A) = \frac{1 + \cos(\beta)}{2r - \sin(\beta)}, \quad (58)$$

$$R^2 = (r - \frac{1}{2}\sin(\beta))^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\beta))^2, \quad (59)$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{3 - \cos(\alpha)}{2r - \sin(\alpha)}. \quad (60)$$

Esta transformación tiene un punto fijo en  $\alpha=\pi/2, r=1/2$ . En el punto fijo es  $\beta=\pi/2$ , luego si  $\mathbf{y}_n$  e  $\mathbf{y}_{n+1}$  tienen longitud  $h/2$  y el ángulo de  $\mathbf{y}_n$  a  $\mathbf{y}_{n+1}$  es  $\pi/2$  entonces  $\mathbf{y}_{n+2}$  también tiene longitud  $h/2$  y está avanzado un ángulo igual a  $\pi/2$  con respecto a  $\mathbf{y}_{n+1}$ .

La configuración es localmente atractiva pues los valores propios del jacobiano de la transformación (58) - (59) - (60) en el punto fijo son 0 y 1/3.

De manera similar se obtiene la transformación correspondiente a la fórmula P3-C2-E:

$$tg(A) = \frac{5 \cos(\beta) + 8 - \cos(\alpha)}{12r - 5 \sin(\beta) - \sin(\alpha)}, \quad (61)$$

$$R^2 = (r - \frac{5}{12} \sin(\beta) - \frac{1}{12} \sin(\alpha))^2 + (-\frac{5}{12} \cos(\beta) + \frac{8}{12} - \frac{1}{12} \cos(\alpha))^2, \quad (62)$$

en la que no se descubre por inspección ningún punto fijo. Numéricamente (61) - (62) arroja el punto fijo  $\alpha=1.135535$ ,  $\rho=0.823165$ . Ello explica la configuración de equilibrio hexagonal en la que rota 30.1 grados cada vez que el vector calculado da una vuelta en torno al origen.

## CONCLUSION

Los métodos en diferencias finitas de órdenes dos y tres para la resolución numérica del problema de trayectorias presentados proporcionan mejores aproximaciones que métodos clásicos comparables (mismo número de pasos, mismo orden de consistencia...). El estudio de la generalización a fórmulas de orden más alto queda abierto.

## REFERENCIAS

1. E. Allgower y K. Georg, "Simplicial and Continuation Methods for Approximating Fixed Points and Solutions to Systems of Equations". *SIAM Review* **22**, 28-85 (1980).
2. P. Camino, "Integración numérica de problemas de trayectorias". Tesis doctoral, Universidad de Valladolid (1985).
3. P. Camino "Extrapolating the CELF Method". Actas del VIII C.E.D.Y.A., Universidad de Santander (1985).
4. P. Camino y J.M. Sanz Serna, "ODE Solvers for Trajectory Problems and Applications". Biennial Conference on Numerical Analysis, Dundee (1983).
5. R.D. Grigorieff, "Stability of Multistep-Methods on Variable Grids". *Numer. Math.* **42**, 359-377 (1983).
6. J.D. Lambert, "Computational Methods for Ordinary Differential Equations". Wiley, Chichester (1972).
7. J.D. Lambert y R.Y.J. McLeod, "Numerical Methods for Phase-plane problems in Ordinary Differential Equations". *Numerical Analysis Proceedings*, Dundee (1979). Springer, Berlin (1980).
8. D.P. Laurie, "Equispacing Numerical Methods for Trajectory Problems". *Proceedings of the Sixth South African Symposium in Numerical Analysis*, Durban, (1980).
9. J.C. López Marcos, "Estabilidad de discretizaciones no lineales". Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, (1985).
10. R.Y.J. McLeod y J.M. Sanz Serna, "Geometrically Derived Difference Formulae for the Numerical Integration of Trajectory Problems". *IMA J. Numer. Anal.* **2**, 357-370 (1980).
11. W.C. Rheinboldt, "Solution Fields of Nonlinear Equations and Continuation Methods". *SIAM J. Numer. Anal.* **17**, 221-237 (1980).

12. J.M. Sanz Serna, "Convergence of the Lambert-McLeod Trayectory and of the CELF Method". *Numer. Math.* **45**, 173-182 (1984).
13. J.M. Sanz Serna, "Stability and Convergence in Numerical Analysis. I: Linear Problems, a simple, comprehensive account" in "Nonlinear Differential Equations", Pitman, Boston (1985).
14. L.F. Shampine, M.K. Gordon, "Computer Solution of Ordinary Differential Equations. The Initial Value Problem". W.H. Freeman, San Francisco, (1975).
15. H.J. Stetter, "Symmetric Two-step Algorithms for Ordinary Differential Equations". *Computing* **5**, 267-280 (1970).
16. Q. Zengfu, "A class of Nonlinear Methods for Ordinary Differential Equations". Preprint, (1984).